अध्याय 10

रचनाएँ

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

- एक रेखाखंड का आंतरिक रूप से एक दिये हुए अनुपात में विभाजन।
- एक दिये हुए त्रिभुज के समरूप एक दिये हुए स्केल गुणक के अनुसार त्रिभुज की रचना करना, जहाँ स्केल गुणक 1 से छोटा हो सकता है या 1 से बड़ा भी हो सकता है।
- किसी बाहरी बिंदु से वृत्त पर स्पर्श रेखाओं के एक युग्म की रचना करना।

(B) बहु विकल्पीय प्रश्न

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक रेखाखंड AB को $p : q$ के अनुपात में विभाजित करने के लिए (यहाँ p और q धनात्मक पूर्णांक हैं), एक किरण AX खींचिए ताकि $\angle BAX$ एक न्यून कोण हो। फिर किरण AX पर समान दूरियों पर इतने बिंदु अंकित कीजिए कि इन बिंदुओं की न्यूनतम संख्या हो

(A) p और q में से बड़ी　　(B) $p + q$

(C) $p + q - 1$　　(D) pq

हल : उत्तर (B)

प्रतिदर्श प्रश्न 2: किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का ऐसा युग्म खींचने के लिए कि उनके बीच का कोण 35° हो, उन दो त्रिज्याओं के सिरों पर स्पर्श रेखाएँ खींचनी चाहिए, जिनके बीच का कोण हो

(A) 105°　　(B) 70°　　(C) 140°　　(D) 145°

हल: उत्तर (D)

प्रश्नावली 10.1

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. एक रेखाखंड AB को 5:7 के अनुपात में विभाजित करने के लिए, पहले एक किरण AX खींचिए, ताकि ∠BAX एक न्यून कोण हो और फिर किरण AX पर समान दूरियों पर बिंदु अंकित किये जाएँ ताकि इनकी न्यूनतम संख्या हो

(A) 8 (B) 10 (C) 11 (D) 12

2. एक रेखाखंड AB को 4:7 के अनुपात में विभाजित करने के लिए, पहले एक किरण AX इस प्रकार खींची जाती है कि ∠BAX एक न्यून कोण हो और फिर किरण AX पर समान दूरियों पर बिंदु A_1, A_2, A_3, ... अंकित किये जाते हैं और बिंदु B को निम्नलिखित से मिलाया जाता है

(A) A_{12} (B) A_{11} (C) A_{10} (D) A_9

3. एक रेखाखंड AB को 5 : 6 के अनुपात में विभाजित करने के लिए, एक किरण AX खींचिए ताकि ∠BAX एक न्यून कोण हो, फिर किरण BY किरण AX के समांतर विपरीत दिशा में खींचिए। इसके बाद AX और BY किरणों पर क्रमशः समान दूरियों पर बिंदु A_1, A_2, A_3, ... और B_1, B_2, B_3, ... अंकित किये जाएँ। फिर जिन बिंदुओं को मिलाया जाता है वे हैं

(A) A_5 और B_6 (B) A_6 और B_5 (C) A_4 और B_5 (D) A_5 और B_4

4. एक दिये हुए त्रिभुज ABC के समरूप एक ऐसा त्रिभुज बनाने के लिए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं का $\frac{3}{7}$ हों, पहले एक किरण BX ऐसी खींचिए कि ∠CBX एक न्यून कोण हो और X भुजा BC के सापेक्ष A के विपरीत ओर हो। किरण BX पर अब समान दूरियों पर बिंदु B_1, B_2, B_3, ... अंकित कीजिए तथा उसके बाद अगला चरण मिलाने का है

(A) B_{10} को C से (B) B_3 को C से (C) B_7 को C से (D) B_4 को C से

5. एक दिये हुए त्रिभुज ABC के समरूप एक ऐसा त्रिभुज बनाने के लिए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं का $\frac{8}{5}$ हों, पहले एक किरण BX ऐसी खींचिए कि ∠CBX एक न्यून कोण हो और X भुजा BC के सापेक्ष A के विपरीत ओर हो। किरण BX पर अब समान दूरियों पर अंकित किये जाने वाले बिंदुओं की न्यूनतम संख्या है

(A) 5 (B) 8 (C) 13 (D) 3

6. किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं का एक ऐसा युग्म खींचने के लिए कि उनके बीच का कोण 60° हों, उन दो त्रिज्याओं के सिरों पर स्पर्श रेखाएँ खींचनी चाहिए जिनके बीच का कोण हो

(A) 135° (B) 90° (C) 60° (D) 120°

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का कारण दीजिए।

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : ज्यामितीय रचना से, एक दिये हुए रेखाखंड को $2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}$ के अनुपात में विभाजित करना संभव है।

हल : असत्य। क्योंकि $2+\sqrt{3}:2-\sqrt{3}$ को सरल करने पर, $7+4\sqrt{3}:1$ प्राप्त होता है। यहाँ $7+4\sqrt{3}$ एक धनात्मक पूर्णांक नहीं है, जबकि 1 है।

प्रश्नावली 10.2

निम्नलिखित में से प्रत्येक में, सत्य या असत्य लिखिए तथा अपने उत्तर का कारण दीजिए :

1. ज्यामितीय रचना से, एक दिये हुए रेखाखंड को $\sqrt{3}:\frac{1}{\sqrt{3}}$ के अनुपात में विभाजित किया जा सकता है।

2. एक दिये हुए त्रिभुज के समरूप एक ऐसे त्रिभुज की रचना करने के लिए जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं का $\frac{7}{3}$ हों, BC से एक न्यून कोण बनाती हुई एक किरण BX खींचिए, ताकि X भुजा BC के सापेक्ष A के विपरीत ओर स्थित हो। BX पर समान दूरियों पर बिंदु B_1, B_2, ..., B_7 अंकित कीजिए, B_3 को C से मिलाइए और फिर B_3C के समांतर एक रेखाखंड B_6C' खींचा जाता है,जबकि बिंदु C' बढ़ाई गयी भुजा BC पर स्थित है। अंत में, AC के समांतर रेखाखंड $A'C'$ खींचा जाता है।

3. त्रिज्या 3.5 cm वाले वृत्त के केंद्र से 3 cm की दूरी पर स्थित एक बिंदु P से उस वृत्त की स्पर्श रेखाओं के एक युग्म की रचना की जा सकती है।

4. किसी वृत्त पर स्पर्श रेखाओं के एक ऐसे युग्म की रचना की जा सकती है कि जिनके बीच का कोण 170° हो।

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक समबाहु त्रिभुज ABC खींचिए जिसकी प्रत्येक भुजा 4 cm हो। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए जिसका स्केल गुणक $\frac{3}{5}$ हो। क्या नया त्रिभुज भी एक समबाहु त्रिभुज है?

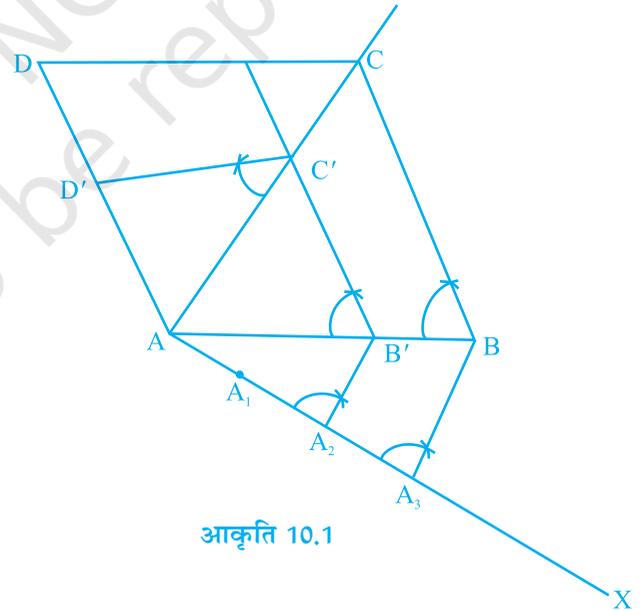
हल : कक्षा X की गणित की पाठ्यपुस्तक में दिये हुए चरणों का अनुसरण कीजिए। हाँ, नया त्रिभुज भी समबाहु है।

प्रश्नावली 10.3

1. लंबाई 7 cm का एक रेखाखंड खींचिए। इस पर स्थित एक बिंदु P ज्ञात कीजिए जो इस रेखाखंड को 3:5 के अनुपात में विभाजित करे।

2. एक समकोण त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें BC = 12 cm, AB = 5 cm और $\angle B = 90°$ है। इस त्रिभुज के समरूप एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसका स्केल गुणक $\frac{2}{3}$ हो। क्या नया त्रिभुज भी एक समकोण त्रिभुज है?

3. एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें BC = 6 cm, CA = 5 cm और AB = 4 cm है। इस त्रिभुज के समरूप और स्केल गुणक $\frac{5}{3}$ के एक त्रिभुज की रचना कीजिए।

4. एक 4 cm त्रिज्या वाले वृत्त पर उस बिंदु से एक स्पर्श रेखा खींचिए, जो इस वृत्त के केंद्र से 6 cm की दूरी पर है।

आकृति 10.1

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : एक समचतुर्भुज ABCD दिया है, जिसमें AB = 4 cm और $\angle ABC = 60°$ है। इसे दो त्रिभुजों ABC और ADC में विभाजित कीजिए। मान लीजिए, ΔABC के समरूप एक त्रिभुज $AB'C'$ की रचना कीजिए, जिसका स्केल गुणक $\frac{2}{3}$ हो। एक रेखाखंड C'D' की रचना कीजिए, जो CD के समांतर हो, जहाँ D' भुजा AD पर स्थित है। क्या AB'C'D' भी एक समचतुर्भुज है? कारण दीजिए।

हल : पहले एक समचतुर्भुज ABCD खींचिए, जिसमें AB = 4 cm और $\angle ABC = 60°$ हो, जैसा आकृति 10.1 में दर्शाया गया है। AC को मिलाइए। त्रिभुज ABC के समरूप स्केल गुणक $\frac{2}{3}$ वाले एक त्रिभुज AB'C' की रचना कीजिए, जैसा कि कक्षा X की गणित की पाठ्यपुस्तक में वर्णित है (देखिए आकृति 10.1)।

अंत में C'D' भुजा CD के समांतर खींचिए।

अब $$\frac{AB'}{AB} = \frac{2}{3} = \frac{A'C'}{AC}$$

साथ ही, $$\frac{AC'}{AC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{AD'}{AD} = \frac{2}{3}$$

अतः $AB' = B'C' = C'D' = AD' = \frac{2}{3}AB$

अर्थात्, AB'C'D' एक समचतुर्भुज है।

प्रश्नावली 10.4

1. दो रेखाखंडों AB और AC के बीच का कोण 60° है, जहाँ AB = 5 cm और AC = 7 cm है। AB और AC पर क्रमशः बिंदु P और Q इस प्रकार निर्धारित कीजिए कि $AP = \frac{3}{4}AB$ और $AQ = \frac{1}{4}AC$ हो। P और Q को मिलाइए तथा PQ की लंबाई ज्ञात कीजिए।

2. एक समांतर चतुर्भुज ABCD खींचिए, जिसमें BC = 5 cm, AB = 3 cm और $\angle ABC = 60°$ है। विकर्ण BD द्वारा इसे दो त्रिभुजों BCD और ABD में विभाजित कीजिए। ΔBDC के समरूप स्केल गुणक $\frac{4}{3}$ के एक त्रिभुज $BD'C'$ की रचना कीजिए। DA के समांतर $D'A'$ खींचिए, जहाँ A' बढ़ाई गयी भुजा BA पर स्थित है। क्या $A'BC'D'$ भी एक समांतर चतुर्भुज है?

3. त्रिज्याओं 3 cm और 5 cm वाले दो संकेंद्रीय वृत्त खींचिए। बाहरी वृत्त पर एक बिंदु लेकर उससे दूसरे वृत्त की स्पर्श रेखाओं के युग्म की रचना कीजिए। एक स्पर्श रेखा की लंबाई मापिये तथा वास्तविक परिकलन से इसका सत्यापन कीजिए।

4. एक समद्विबाहु त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = AC = 6 cm और BC = 5 cm है। ΔABC के समरूप, एक त्रिभुज PQR की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 8 cm हो। अपनी रचना का औचित्य भी दीजिए।

5. एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = 5 cm, BC = 6 cm और $\angle ABC = 60°$ है। ΔABC के समरूप, स्केल गुणक $\frac{5}{7}$ के एक त्रिभुज की रचना कीजिए। रचना का औचित्य दीजिए।

6. त्रिज्या 4 cm का एक वृत्त खींचिए। इस पर स्पर्श रेखाओं के एक ऐसे युग्म की रचना कीजिए कि इनके बीच का कोण 60° हो। रचना का औचित्य भी दीजिए। वृत्त के केंद्र और स्पर्श रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु के बीच की दूरी को मापिये।

7. एक त्रिभुज ABC खींचिए, जिसमें AB = 4 cm, BC = 6 cm और AC = 9 cm है। इस ΔABC के समरूप, स्केल गुणक $\frac{3}{2}$ के एक त्रिभुज की रचना कीजिए। रचना का औचित्य दीजिए क्या दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं? ध्यान दीजिए कि यहाँ दोनों त्रिभुजों में तीनों कोण और दो भुजाएँ बराबर हैं।